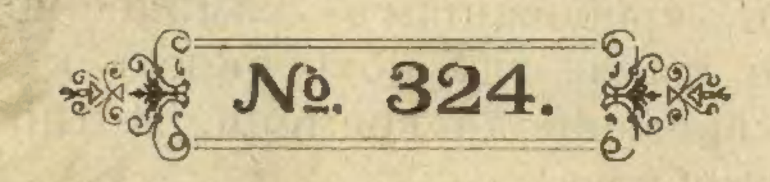
XXVII Сем. № 12.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

30 Іюня



№ 324.

1902 г.

Содержаніе: Приготовленіе ожиженныхъ газовъ и ихъ важнѣйшія примѣненія. (Продолженіе). *E. Mathias*. Переводъ *Д. Шора*. — Этюды по основаніямъ геометріи. Преобразованіе многоугольниковъ и многогранниковъ. *С. Рейтера*. — Екатеринославское Научное Общество. *Ред.*—Тема для сотрудниковъ. Объ ариѳметической и геометрической прогрессіяхъ высшихъ порядковъ.—Математическія мелочи. Геометрическій парадоксъ. *Д. Ш.* — Разныя извѣстія: † А. И. Гольденбергъ. — Задачи для учащихся, №№ 208—213 (4 сер.). — Рѣшенія задачъ, №№ 111, 115, 122, 133. — Содержаніе „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной математики“ за XXVII семестръ. — Объявленія.

Приготовленіе ожиженныхъ газовъ и ихъ важнѣйшія примѣненія. *)

E. Mathias, профессора физики въ Тулузѣ.

(Переводъ съ французскаго Д. Шора).

Продолженіе *).

3.—Другія приборы для приготовленія жидкаго воздуха.

Существуютъ еще другія системы аппаратовъ для ожиженія воздуха, изъ которыхъ мы упомянемъ о двухъ. Первый принадлежитъ профессору J. Dewar'у (1896 г.). Въ немъ воздухъ до освобожденія отъ высокаго давленія, подвергается двукратному охлажденію, а именно: сначала въ твердой углекислотѣ при температурѣ въ 79°, а затѣмъ въ жидкой; послѣдняя находится подъ атмосфернымъ или еще болѣе низкимъ давленіемъ. Если сжимать воздухъ сначала до 200 атмосферъ, то этотъ приборъ даетъ 5% ожиженнаго воздуха; при томъ уже черезъ 6 минутъ

*) См. № 323 „Вѣстника“.

послѣ приведенія машины въ дѣйствіе она начинаетъ давать жидкій воздухъ. Другой аппаратъ, изобрѣтенный Dr. Hampson'омъ, ожижаетъ 6,6% употребленнаго воздуха и уже приблизительно черезъ 15 минутъ послѣ начала дѣйствія получается жидкость. Первоначальное сжатіе воздуха до 120 атмосферъ требуетъ приблизительно 3,5 лошадиныхъ силъ.

Въ аппаратахъ Dewar'а и Hampson'а фаза сжатія воздуха совершенно независитъ отъ фазы самаго ожиженія. Эти приборы не слишкомъ громоздки и въ другихъ отношеніяхъ очень удобны, а потому отвѣчаютъ требованіямъ химическихъ и физическихъ лабораторій; вообще тамъ, гдѣ потребность въ жидкомъ воздухѣ является лишь отъ времени до времени, охотно поступаются экономіей въ пользу удобства.

Машины, подобныя прибору Linde, находятъ въ дѣйствительности примѣненіе только тамъ, гдѣ требуется приготовлять жидкій воздухъ для промышленныхъ цѣлей, т. е. въ большихъ количествахъ, при непрерывномъ дѣйствіи машины.

Приборъ Dr. Hampson'а распространенъ почти исключительно въ Англіи. Напомнимъ, что благодаря ему лондонскій заводъ Brin могъ доставить профессору W. Ramsay'ю жидкій воздухъ въ необходимыхъ количествахъ; а это дало возможность путемъ удачно выполненной дробной перегонки открыть газы неонъ, криптонъ и ксенонъ, которые примѣшаны къ аргону, кислороду, азоту и углекислотѣ атмосфернаго воздуха.

4.—*Общія замѣчанія по поводу ожиженія воздуха.*

Всѣ эти приборы, равно какъ и аппаратъ Tripler'а, въ значительной мѣрѣ уступаютъ машинѣ Linde въ отношеніи экономной затраты энергіи; хотя они также путемъ расширенія газовъ накопляютъ холодъ при посредствѣ внѣшней работы, либо безъ нея, но въ нихъ не соблюдается, какъ въ машинѣ Linde, условіе, по которому работа изотермическаго сжатія газа должна быть minimum. Для паденія давленія $p_1—p_2$ работа изотермическаго сжатія единицы газа, считая переходъ отъ давленія p_2 къ давленію p_1, дается теоретической формулой:

$$r = RTl\frac{p_1}{p_2},$$

гдѣ r—работа, R—постоянная формулы Clapeyron'а, T—абсолютная температура газа, l—знакъ натуральныхъ логариѳмовъ.

Ясно, что для достиженія экономіи нужно стремиться получить $p_1—p_2$ по возможности большимъ, при возможно маломъ $\frac{p_1}{p_2}$.

Это отлично поняли изобрѣтатели Ostergreen и Bürger, которые, при изобрѣтеніи новой машины для ожиженія воздуха,

вернулись къ руководящей идеѣ машины Linde, и примѣнили два цикла—циклъ охлажденія и циклъ питанія машины; разница состоитъ лишь въ томъ, что циклъ охлажденія функціонируетъ въ ихъ аппаратѣ подъ дѣйствіемъ приблизительно вдвое меньшаго давленія, чѣмъ въ приборахъ Linde, приспособленныхъ для крупнаго производства [9]). Этотъ „новый“ пріемъ эксплоатируется Нью Іоркской фирмой „General Liquid Air and Refrigerating C⁰“, приборы которой въ состояніи давать отъ 6 до 7 тысячъ литровъ жидкаго воздуха въ сутки; самая же большая машина Linde, лишь недавно построенная, могла бы производить maximum только 50 килограммовъ жидкаго воздуха въ часъ, т. е. приблизительно 1100 литровъ въ день, пользуясь работой, не превышающей 100 лошадиныхъ силъ. Вообще, чѣмъ больше будутъ размѣры и мощность машинъ для добыванія жидкаго воздуха, тѣмъ большей экономіи можно будетъ достигнуть. Нѣтъ ничего невозможнаго въ томъ, чтобы достичь добычи 1 килограмма жидкаго воздуха въ часъ при помощи одной лошадиной силы. Чтобы показать, что это мыслимо, достаточно вычислить теоретическую работу, необходимую для ожиженія въ часъ 1 килограмма воздуха подъ атмосфернымъ давленіемъ. Это вычисленіе даетъ въ результатѣ, что теоретически для ожиженія въ часъ 1 килограмма воздуха при атмосферномъ давленіи надо употребить 0,3 лошадиныхъ силъ.

Такъ что *теоретически* можно было бы получать при работѣ одной лошадиной силы 3 килограмма ожиженнаго воздуха въ часъ; на самомъ же дѣлѣ, наибольшая практическая добыча въ 6 разъ меньше [10]). По словамъ профессора Linde, приготовленіе 1-го килограмма жидкаго воздуха обходится меньше, чѣмъ въ 0,125 франка, если примѣнять машину, дающую въ день 1000 килограммовъ. Эта стоимость должна значительно уменьшиться, если примѣнять еще бóльшіе аппараты,—и соотвѣтственно увеличиться, если пользоваться не столь цѣлесообразнымъ приборомъ.

Изъ приведенныхъ соображеній видно, что поле для усовершенствованій различныхъ деталей, отъ которыхъ зависитъ добыча ожиженнаго воздуха, еще открыто; но на ряду съ этимъ возникаютъ безразсудныя мечтанія и утопіи, если вѣрить послѣднимъ сообщеніямъ съ той стороны Атлантическаго Океана. Не осмѣливаясь отнести ихъ къ этой категоріи, мы находимъ полезнымъ сообщить читателямъ о двухъ проэктахъ усовершенствованія ожиженія воздуха; одинъ изъ нихъ принадлежитъ Tripler'у, другой Raoul'ю Pictet, который въ настоящее время становится гражданиномъ Соединенныхъ Штатовъ.

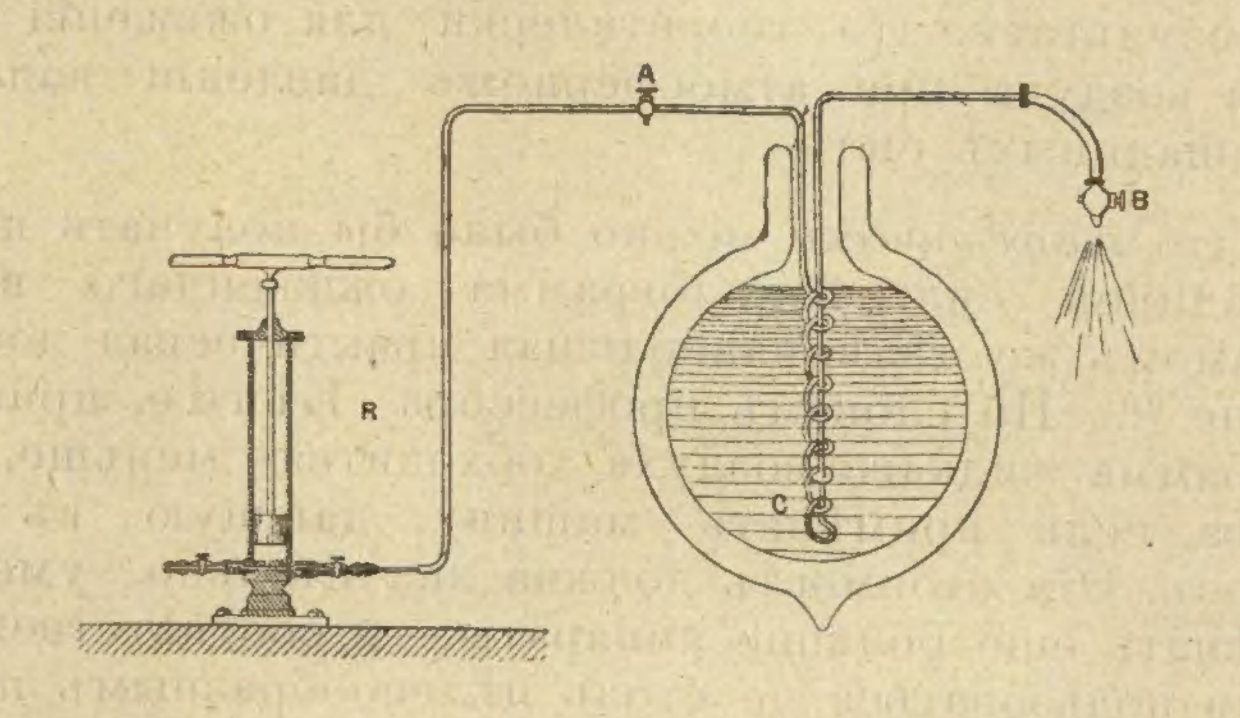
---

[9]) Машина Ostergreen'a и Bürger'a функціонируетъ при давленіи въ 1250 фунтовъ на кв. футъ (83 атм.), и 300 фунтовъ на кв. футъ (20 атм.); такъ что максимальное давленіе вдвое меньше, чѣмъ въ аппаратѣ Tripler'a (см. выше: maximum = 170 атм.).

[10]) Linde: *Zeitschrift des Vereins deutscher Jngenieure*, B. *XLIV*.

Идея Tripler'а состоитъ въ томъ, чтобы приводить въ дѣйствіе его машину для ожиженія воздуха помощью мотора его изобрѣтенія, движимаго, въ свою очередь, жидкимъ воздухомъ; какъ сообщаетъ Tripler, послѣ того, какъ моторъ поглощаетъ 13,5 литровъ (3 галлона) жидкаго воздуха, его аппаратъ даетъ 31,5 литровъ (7 галлоновъ), такъ что получается чистая прибыль въ 18 литровъ (4 галлона) жидкаго воздуха. *Perpetuum mobile!* восклицаетъ читатель; но изобрѣтатель возражаетъ на это слѣдующимъ образомъ: энергія, движущая моторъ, заимствована изъ внѣшняго воздуха, т. е. отъ солнца—источника почти всей земной энергіи. Этотъ отвѣтъ правдоподобенъ.

Идея Pictet состоитъ въ слѣдующемъ. Онъ замѣтилъ, что, если привести воздухъ при атмосферномъ давленіи къ—191° при помощи жидкаго воздуха, то дальнѣйшее ожиженіе происходитъ безъ затраты большой силы. Представимъ себѣ змѣевикъ *C* (фиг. 3), соединенный однимъ своимъ концомъ съ ручнымъ насосомъ *R*, а другимъ съ двухколѣнчатой трубкой, снабженной краномъ *B*. Змѣевикъ этотъ погруженъ въ жидкій воздухъ, полученный ка-



Фиг. 3.— *Схема прибора Raoul'я Pictet для ожиженія воздуха.* — *R*—насосъ. *C*—змѣевикъ, погруженный въ жидкій воздухъ. *A*, *B*—краны.

кимъ-либо независимымъ пріемомъ. Если открыть первый кранъ *A* и привести насосъ въ дѣйствіе, то газообразный воздухъ, заключающійся въ змѣевикѣ, начинаетъ ожижаться, отдавая свою скрытую теплоту испаренія—60 калорій на граммъ—жидкому воздуху, въ который змѣевикъ погруженъ. Отсюда выводъ: наружный жидкій воздухъ начинаетъ кипѣть и его испаряется столько, сколько ожижается внутри змѣевика; больше того, можетъ показаться, что, благодаря поступающей извнѣ теплотѣ, внѣшній воздухъ испаряется скорѣе, чѣмъ воздухъ въ змѣевикѣ ожижается. Но это такъ только кажется; внѣшній воздухъ дѣйствительно кипитъ, но испареніе его происходитъ значительно медленнѣе, чѣмъ ожиженіе внутренняго воздуха. Такъ что, если изъ крана *B* провести жидкій воздухъ въ сосудъ, окружающій змѣевикъ, то количество въ немъ заключающагося жидкаго воз-

духа не только не будетъ убывать, но еще станетъ возрастать все время, пока дѣйствуетъ насосъ! [11]) Этотъ пріемъ, если воспользоваться большимъ рядомъ подобныхъ ступеней, даетъ возможность, при помощи остроумныхъ приспособленій, разложить воздухъ на составныя его части, отдѣлить въ жидкомъ или твердомъ состояніи углекислоту, въ немъ заключающуюся, и т. п. [12]).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Этюды по основаніямъ геометріи.

Преобразованіе многоугольниковъ и многогранниковъ.

С. Рейтера въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

Теперь возьмемъ всѣ другія „оси реберъ" и поступимъ съ каждой, подобно вышеописанному; полученные цилиндры приложимъ одинъ къ другому, такъ что составленный такимъ образомъ цилиндръ будетъ имѣть высоту b, равную суммѣ всѣхъ „осей реберъ". Этотъ цилиндръ будетъ сплошь покрытъ цилиндрическими прямоугольниками, среди которыхъ будутъ встрѣчаться прямоугольники, имѣющіе основанія $\tau_1, \tau_2, \ldots$ и $2\pi-\sigma_1, 2\pi-\sigma_2, \ldots$ и при томъ только по одному разу. Для удобства обозрѣнія поверхности цилиндра развернемъ ее на плоскость. Тогда поверхность эта станетъ прямоугольникомъ съ высотой b и основаніемъ 2π, и каждый изъ цилиндрическихъ прямоугольниковъ превратится въ плоскій прямоугольникъ съ прежними высотой и основаніемъ; получимъ, примѣрно, слѣдующую фигуру: Рис. 8 изображаетъ простѣйшій случай, соотвѣтствующій рис. 2, когда P есть тетраэдръ, разбитый на двѣ части. Пунктирныя линіи имѣютъ особое значеніе, которое выяснимъ ниже.

Такъ какъ прямоугольникъ $2\pi b$ равенъ суммѣ всѣхъ прямоугольниковъ, его покрывающихъ, то имѣемъ:

$$\tau_1 t_1+\tau_2 t_2+\ldots+(2\pi-\sigma_1)s_1+(2\pi-\sigma_2)s_2+\ldots+(h_1+h_2+\ldots)\pi=2\pi b. \quad (II)$$

Здѣсь величины $\tau_1, \tau_2, \ldots \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ и 2π имѣютъ положительные, но, быть можетъ, ирраціональные коэффиціенты: $t_1, t_2, \ldots, s_1, s_2 \ldots, h_1, h_2, \ldots$ и b. Мы покажемъ, что между этими величинами существуетъ соотношеніе, подобное соотношенію (II), но съ положительными и раціональными коэффиціентами $T_1, T_2, \ldots S_1, S_2, \ldots H_1, H_2, \ldots$ и B.

[11]) См. „*Scientific American*", 31 марта 1900 г., стр. 201.

[12]) „*Scientific American*", l. c., стр. 202.—Идеи Raoul'я Pictet объ ожиженіи воздуха и его дробной перегонкѣ послужили темой для обмѣна мнѣній между нимъ и „Gesellschaft für Lindès Eismachinen", при чемъ споръ остался неразрѣшеннымъ.—См. „*Zeitschrift für comprimirte und flüssige Gase*", B. *IV*, стр. 65—71, августъ 1900.

*) См. № 323 „Вѣстника".

Такъ какъ прямоугольники, покрывающіе прямоугольникъ $2\pi b$, не оставляютъ просвѣтовъ и не налегаютъ другъ на друга, то между ихъ высотами и высотой b существуетъ нѣкоторый

Фиг. 8.

рядъ соотношеній. Въ нашемъ простѣйшемъ случаѣ, изображенномъ на рис. 8, эти соотношенія будутъ напр., таковы:

(a)

(α) $t_1+t_7+t_2+t_9+t_4+t_{12}+t_5+t_6+t_3=b.$ Слѣдствіе (α) и (β): $t_5=t_{10}$

(β) $t_1+t_7+t_2+t_9+t_4+t_{12}+t_{10}+t_6+t_3=b$

(γ) $t_1+t_7+t_2+t_9+t_4+t_{12}+s_6+t_6+t_8=b$ Слѣд. (β), (γ) и (δ): $t_3=t_8$.

(δ) $t_{10}=s_6$

(ε) $t_1+t_7+t_2+t_9+t_4+t_{12}+s_6+t_{11}+t_8=b.$ Слѣд. (γ) и (ε): $t_6=t_{11}$.

(ζ) $t_1+t_7+t_2+t_9+s_4+t_{12}+s_6+t_{11}+t_8=b.$ Слѣд. (ε) и (ζ): $t_4=s_4$.

(η) $t_1+t_7+t_2+t_9+s_4+s_5+s_6+t_{11}+t_8=b.$ Сл. (ζ) и (η): $t_{12}=s_5$.

(ϑ) $s_1+t_2+s_3+s_4+s_5+s_6+t_{11}+t_8=b.$ Слѣд. (η), (ϑ) и $(\varkappa)$: $t_9=s_3$.

$(\varkappa)$ $s_1=t_1+t_7$.

(λ) $s_1+t_2+s_3+s_4+s_5+s_6+h_1+h_2=b.$ Слѣдствіе (ϑ) и (λ): $h_1+h_2=t_{11}+t_8$.

(μ) $s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+h_1+h_2=b.$ Слѣдствіе (λ) и (μ): $t_2=s_2$.

Въ общемъ случаѣ, поступая такъ же, получимъ нѣкоторую

систему однородныхъ уравненій между величинами $t_1, t_2, \ldots$ $s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots$ и b. Коэффиціенты при этихъ величинахъ равны 1 или 0. Мы сейчасъ укажемъ правило, какъ они составляются.

Изобразимъ эту систему такъ:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} f_1(t_1, t_2, \ldots s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots b) \\ f_2(t_1, t_2, \ldots s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots b) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(t_1, t_2, \ldots s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots b). \end{array} \right.$$

Легко видѣть, что уравненій этихъ меньше, чѣмъ величинъ, въ нихъ входящихъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы получить эти уравненія, мы разобьемъ весь прямоугольникъ $2\pi b$ на вертикальныя полосы такъ, чтобы внутри каждой полосы заключалась либо одна боковая сторона нѣкотораго составляющаго прямоугольника, либо рядъ боковыхъ сторонъ, которыя лежатъ на одной вертикали (на чертежѣ эти полосы намѣчены пунктиромъ).

Первая полоса, а также всякая такая, внутри которой заключается одна боковая сторона, дадутъ намъ по одному уравненію; но въ каждую полосу войдутъ части, по крайней мѣрѣ, восьми лежащихъ другъ надъ другомъ прямоугольниковъ, ибо въ простѣйшемъ случаѣ, когда тетраэдръ разбитъ на двѣ части, соотвѣтств. рисунку 2, имѣемъ 8 „осей реберъ", которыя дадутъ восемь наложенныхъ другъ на друга цилиндровъ; такъ, прямоугольникъ $2\pi b$ будетъ состоять, по крайней мѣрѣ, изъ 8 ярусовъ составляющихъ его прямоугольниковъ, какъ это показано на рис. 8. Поэтому первое уравненіе будетъ уравненіемъ, по крайней мѣрѣ, между 8-ью величинами.

Каждая новая полоса, если она заключаетъ внутри себя лишь одну боковую сторону, напр., t_i какого-нибудь прямоугольника прибавитъ только одно уравненіе (при томъ независимое отъ предыдущихъ, ибо въ него входитъ новая величина). Дойдя до полосы, заключающей въ себѣ нѣсколько боковыхъ сторонъ, лежащихъ на одной вертикали, напр., двѣ, мы снова получимъ одно уравненіе, составленное подобно предыдущимъ, въ которое входятъ двѣ новыхъ величины. Если эти двѣ стороны, лежащія на одной вертикали, не лежатъ непосредственно одна подъ другой, то пишемъ еще одно уравненіе, въ которомъ приравниваемъ любую изъ этихъ сторонъ къ сторонѣ рядомъ лежащаго прямоугольника. Подобнаго же уравненія для второй стороны писать не будемъ, ибо оно есть слѣдствіе трехъ предыдущихъ уравненій.

Если число новыхъ сторонъ въ полосѣ больше двухъ, то разбиваемъ всѣ эти стороны на группы такъ, чтобы въ каждую входила либо одна сторона, либо рядъ лежащихъ непосредственно одна подъ другой, и для каждой группы составимъ уравненіе, приравнявъ сумму сторонъ этой группы къ суммѣ сторонъ со-

сѣднихъ прямоугольниковъ. Для одной группы не пишемъ уравненій, ибо она вытекаетъ изъ уравненій для остальныхъ группъ, уравненія, составленнаго для всей полосы и уравненія составленнаго для предшествующей полосы.

Прослѣдимъ составленіе уравненій (a).

Первая полоса, выдѣленная первымъ пунктиромъ, состоитъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ высоты t_1, t_7, t_2, t_9, t_4, t_{12}, t_5, t_6, t_3. Приравнивая сумму этихъ высотъ высотѣ b всего прямоугольника, получаемъ уравненіе (α).

Вторая полоса, отдѣленная вторымъ пунктиромъ, содержитъ только одну боковую сторону, именно, общую сторону прямоугольниковъ $\tau_5 t_5$ и $\tau_{10} t_{10}$. Она даетъ уравненіе (β). Изъ первыхъ двухъ уравненій вытекаетъ, какъ слѣдствіе, уравненіе $\tau_5 = \tau_{10}$, геометрическій смыслъ котораго ясенъ.

Третья полоса содержитъ двѣ боковыя стороны τ_3 и τ_{10}. Эта полоса даетъ соотношенія (γ) и (ζ); уравненіе же $t_3 = t_8$ представляетъ собой уже слѣдствіе предыдущихъ уравненій.

Этотъ анализъ читатель доведетъ до конца самъ.

Изъ сказаннаго ясно, что число уравненій системы (A), другъ другу не противорѣчащихъ и другъ отъ друга не зависящихъ, по меньшей мѣрѣ, на 7 меньше числа величинъ, въ нихъ входящихъ.

А въ такомъ случаѣ система однородныхъ уравненій (А) можетъ быть удовлетворена раціональными положительными величинами T_1, T_2, ... S_1, S_2, ... H_1, H_2, ... B, вставленными соотвѣтственно, вмѣсто t_1, t_2, ..., s_1, s_2, ..., h_1, h_2, ..., b.

Въ самомъ дѣлѣ, если число k уравненій на p меньше, чѣмъ число входящихъ въ нихъ величинъ, то, выдѣливъ p любыхъ величинъ, придадимъ имъ раціональныя значенія; остальныя k величинъ опредѣлятся раціонально изъ k уравненій. Чтобы онѣ были положительны, нужно только подобрать p произвольныхъ значеній выдѣленныхъ нами величинъ достаточно близкими къ тѣмъ первоначальнымъ значеніямъ ихъ, съ которыми онѣ входили въ уравненія (А) *).

*) Приведемъ полное доказательство того, что k однородныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами между $k+p$ величинами, удовлетворяются системой положительныхъ и *раціональныхъ* рѣшеній, разъ они удовлетворяются системой какихъ-нибудь положительныхъ рѣшеній.

Пусть эти послѣднія рѣшенія суть

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_k, x_{k+1}, \dots x_{k+p}.$$

Перенося величины

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_{k+p}$$

въ правыя части, получимъ систему уравненій

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}, x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = d_1 \\ a_{21}, x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = d_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k = d_k \end{array}\right\}$$

гдѣ d_1, d_2, ... d_k суть линейныя раціональныя функціи величинъ

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_{k+p}.$$

Итакъ, всякій разъ, какъ существуютъ соотношенія (А) между положительными величинами $t_1, t_2, \ldots s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots b$, существуютъ тѣ же соотношенія между положительными раціональными числами $T_1, T_2, \ldots S_1, S_2, \ldots H_1, H_2, \ldots B$. А такъ какъ соотношенія (А) указываютъ, какъ должны быть связаны между собой величины $t_1, t_2, \ldots s_1, s_2, \ldots h_1, h_2, \ldots b$, чтобы прямоугольникъ $2\pi b$ былъ сплошь занятъ покрывающими его прямоугольниками, то и удовлетворяющія тѣмъ же соотношеніямъ величины

$$T_1, T_2, \ldots S_1, S_2, \ldots H_1, H_2, \ldots B$$

таковы, что прямоугольники

$$T_1\tau_1 + T_2\tau_2, \ldots + S_1(2\pi - \sigma_1) + S_2(\pi - \sigma_2) + (H_1 + H_2 \ldots)\pi$$

сплошь покрываютъ прямоугольникъ $2\pi B$, не налагаясь другъ на друга.

Дѣйствительно, любой прямоугольникъ вида $\tau_i t_i$ или $(2\pi - \sigma_i)s_i$ или πh_i теперь замѣнится прямоугольникомъ $\tau_i T_i$ или $(2\pi - \sigma_i) S_i$ или πH_i; такъ что основаніе каждаго прямоугольника не мѣняется, а мѣняется лишь его высота. Измѣненные такимъ образомъ прямоугольники будемъ складывать сверху внизъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ были сложены первоначальные прямоугольники. Кромѣ того, начнемъ ихъ складывать въ томъ порядкѣ, въ которомъ мы писали

Отсюда, при $i < k$ $x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta}$, гдѣ Δ есть опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ, а слѣдовательно, имѣетъ раціональное значеніе, а Δ_{xi} есть опредѣлитель, котораго одинъ столбецъ состоитъ изъ величинъ $d_1, d_2, \ldots d_k$; миноры же соотвѣтствующіе элементамъ этого столбца, какъ составленные изъ раціональныхъ коэффиціентовъ, также раціональны; слѣдовательно, x_i можно представить въ видѣ $d_1A_1 + d_2A_2 + \ldots + d_kA_k$, гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_k$ раціональны; а такъ какъ $d_1, d_2, \ldots d_k$ выражаются раціонально черезъ x_{k+1}, $x_{k+2} \ldots x_{k+p}$, то

$$x_i = B_1^{(i)} x_{k+1} + B_2^{(i)} x_{k+2} + \ldots + B_{k+p}^{(i)} x_p$$

гдѣ числа $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \ldots B_{k+p}^{(i)}$ раціональны.

Придавъ $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_{k+p}$ приращенія δ, мы этимъ самымъ сообщимъ x_i также приращеніе δx_i, которое равно $\delta\left(B_1^{(i)} + B_2^{(i)} + \ldots + B_p^{(i)}\right)$ и чтобы величина δ_{xi} была сдѣлана меньше напередъ заданной величины ε, достаточно сдѣлать δ меньше, чѣмъ $\frac{\varepsilon}{pB}$, гдѣ B абсолютная величина наибольшаго изъ коэффиціентовъ, выраженныхъ буквами $B_h^{(i)}$. Точно такъ же можно опредѣлить δ для всякаго другого x_g, гдѣ $g < k$, для того, чтобы δx_g была меньше любой заданной величины ε.

Изъ всѣхъ значеній δ возьмемъ наименьшее или меньшее этого наименьшаго и тогда получимъ систему рѣшеній $X_1, X_2, \ldots X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}$, которыя отличаются соотвѣственно отъ $x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1}, x_{k+p}$ на величину меньшую, нежели ε; слѣдовательно они могутъ быть всегда сдѣланы положительными. А такъ какъ въ сколько угодно маломъ интервалѣ всегда найдется безконечное множество раціональныхъ чиселъ, то мы можемъ величины $X_k, \ldots, X_{k+p}$ выбрать раціональными, и тогда каждая изъ остальныхъ величинъ $X_1, X_2, \ldots X_k$, какъ выраженныя при помощи ихъ раціонально — тоже имѣютъ раціональныя значенія.

уравненія (A) и (a) и въ какомъ мы разбивали прямоугольники на рис. 8 на полосы. Построимъ первый столбецъ лежащихъ другъ на другѣ прямоугольниковъ. Сумма ихъ высотъ равна B. Одинъ изъ нихъ имѣетъ наименьшее основаніе τ_i (въ нашемъ случаѣ τ_5); тогда мы въ промежутокъ, образованный стороной T_i и двумя основаніями верхняго и нижняго прямоугольника, вдвинемъ рядомъ съ прямоугольникомъ $\tau_i T_i$ прямоугольникъ, преобразованный изъ того, который первоначально находился рядомъ съ прямоугольникомъ $\tau_i t_i$ и котораго высота t_k была равна t_i; такъ какъ и теперь $T_k = T_i$, то прямоугольникъ $\tau_i T_i$ войдетъ лѣвымъ бокомъ вплотную въ тотъ промежутокъ, въ который мы его вдвигаемъ. Продолжая подобнымъ же образомъ складывать прямоугольники, мы заполнимъ весь прямоугольникъ $2\pi B$. Слѣдовательно, получимъ соотношеніе:

$$T_1\tau_1 + T_2\tau_2 + \dots + S_1(2\pi - \sigma_1) + S_2(2\pi - \sigma_2) + \dots + (H_1 + H_2 \dots)\pi = B2\pi$$

или

$$T_1\tau_1 + T_2\tau_2 + \dots = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + \dots + C\pi \dots \qquad \text{(III)},$$

гдѣ коэффиціенты, выраженные буквами T, S, H и C, *положительны и раціональны.*

Формулируемъ теперь выводъ, который можетъ быть сдѣланъ изъ всего предыдущаго:

Теорема XII. *Если многогранникъ съ ребрами S_1, S_2, ... S_m и двугранными углами σ_1, σ_2, .. σ_m, можетъ быть разбитъ на многогранники съ ребрами t_1, t_2, ... t_n и двугранными углами τ_1, τ_2, ... τ_n, то имѣютъ мѣсто соотношенія (II) и (A).*

Теорема XIII. *Всякая система значеній перемѣнныхъ*

$$t_1,\ t_2,\ \dots\ s_1,\ s_2,\ \dots\ h_1,\ h_2,\ \dots\ b, \qquad \text{(IV)}$$

удовлетворяющихъ соотношеніямъ (A), удовлетворяетъ также уравненію (II).

Теорема XIV. *Всегда существуетъ нѣкоторая система положительныхъ раціональныхъ значеній перемѣнныхъ (IV), удовлетворяющихъ уравненіямъ (A), а стало быть и уравненію (II) или (III).*

Теперь уже легко вывести данное выше (на стр. 248) условіе (I), необходимое для того, чтобы два равновеликихъ многогранника P и P′ были равносоставлены. Разобьемъ оба на одинаковое число соотвѣтственно конгруэнтныхъ частей, составимъ для обоихъ, какъ мы это прежде дѣлали, „цилиндры разложенія" вокругъ „осей реберъ" и развернемъ пару получившихся цилиндрическихъ поверхностей въ прямоугольники.

Будемъ имѣть для многогранника P систему уравненій (A)

$$\text{(A)} \left\{ \begin{array}{l} f_1(t_1,\ t_2,\ \dots\ t_m,\ s_1,\ s_2,\ \dots\ h_1,\ h_2,\ \dots\ b) = 0 \\ f_2(t_1,\ t_2,\ \dots\ t_m,\ s_1,\ s_2,\ \dots\ h_1,\ h_2,\ \dots\ b) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

и для многогранника P':

$$(A')\begin{cases} f'_1(t_1,\ t_2, \ldots t_m,\ s'_1,\ s'_2, \ldots h'_1,\ h'_2, \ldots b') \\ f'_2(t_1,\ t_2, \ldots t_m,\ s'_1,\ s'_2, \ldots h'_1,\ h'_2, \ldots b') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

При этомъ величины $t_1,\ t_2, \ldots t_m$ въ обѣихъ системахъ общія, ибо это суть длины реберъ многогранниковъ, составляющихъ P и P′, а эти составляющіе многогранники соотвѣтственно конгруэнтны. Обѣ эти системы уравненій можно разсматривать, какъ одну систему уравненій между перемѣнными, которыхъ частныя значенія суть

$$t_1,\ t_2, \ldots s_1,\ s_2, \ldots h_1,\ h_2, \ldots b,\ s'_1,\ s'_2, \ldots h'_1,\ h'_2, \ldots b'.$$

Что системы (A) и (A′) можно слить въ одну систему, слѣдуетъ изъ того, что онѣ другъ другу не противорѣчатъ; а не противорѣчатъ онѣ другъ другу потому, что удовлетворяются одновременно системой только что названныхъ нами частныхъ значеній перемѣнныхъ (IV), какъ это слѣдуетъ изъ существованія для обоихъ многогранниковъ „цилиндровъ разложенія“ (теорема XII). Далѣе, значенія перемѣнныхъ, удовлетворяющія системѣ (A, A′), удовлетворяютъ и каждой системѣ въ отдѣльности.

Система (A, A′) удовлетворяется нѣкоторыми раціональными положительными значеніями перемѣнныхъ

$$T_1,\ T_2, \ldots S_1,\ S_2, \ldots H_1,\ H_2, \ldots B,\ S'_1,\ S'_2, \ldots H'_1,\ H'_2, \ldots B.$$

Тогда уравненія (A) удовлетворяются значеніями

$$T_1,\ T_2, \ldots S_1,\ S_2 \ldots H_1,\ H_2 \ldots B$$

и, слѣдовательно, (теорема XIII) имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$T_1\tau_1 + T_2\tau_2 + \ldots = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + \ldots + C\pi. \quad (V)$$

Въ то же время уравненія (A′) удовлетворяются значеніями

$$T_1,\ T_2, \ldots S'_1,\ S'_2 \ldots H'_1,\ H'_2, \ldots B'$$

и, соотвѣтственно этому, получаемъ, въ силу той же теоремы, соотношеніе

$$T_1\tau_1 + T_2\tau_2 + \ldots = S'_1\sigma'_1 + S'_2\sigma'_2 + \ldots + C'_1\pi. \quad (V')$$

Приравнивая правыя части соотношеній (V) и (V′) имѣемъ:

$$S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + \ldots + C\pi = S'_1\sigma'_1 + S'_2\sigma'_2 + \ldots + C'\pi$$

и освободивъ обѣ части отъ знаменателей, придемъ къ интересующему насъ равенству

$$r_{\sigma_1}\sigma_1 + r_{\sigma_2}\sigma_2 + \ldots = r_{\sigma'_1}\sigma'_1 + r_{\sigma'_2}\sigma'_2 + \ldots + R\pi,$$

гдѣ $r_{\sigma_1},\ r_{\sigma_2}, \ldots, r_{\sigma'_1},\ r_{\sigma'_2}, \ldots$ суть цѣлыя и положительныя числа, а R число цѣлое. Итакъ:

Теорема XV. *Если два многогранника съ двугранными углами*

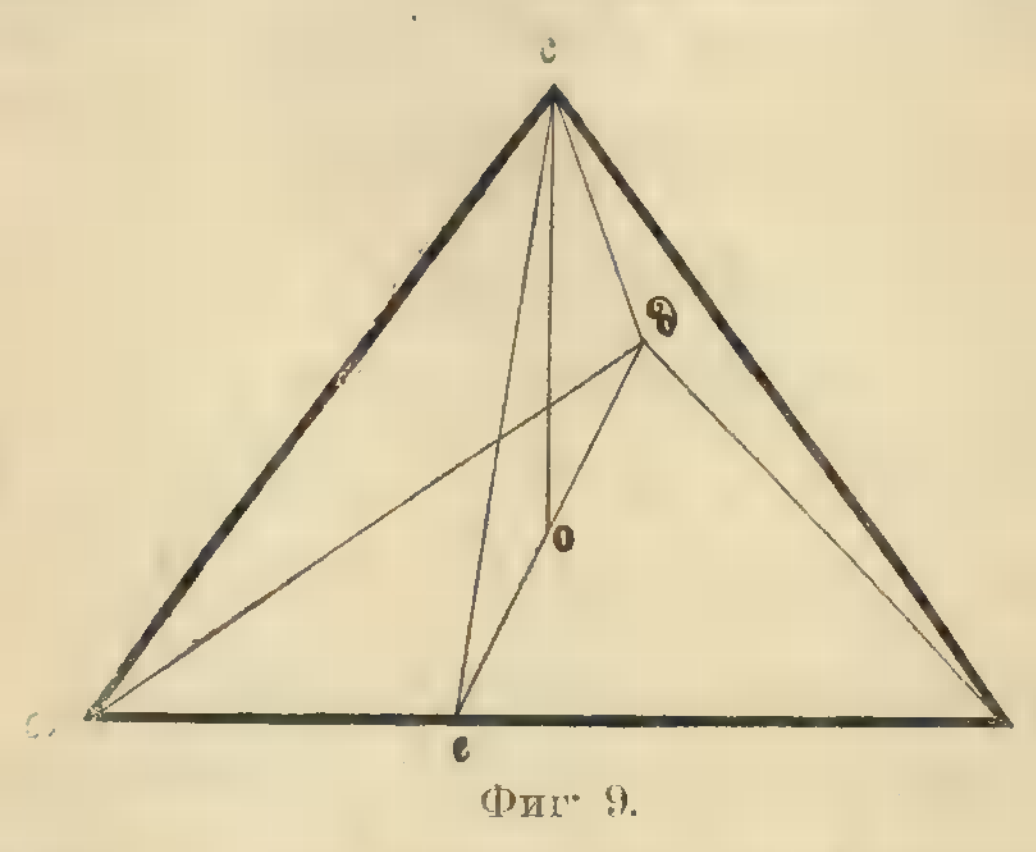
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\ \dots\ \sigma_m$$
$$\sigma'_1,\ \sigma'_2,\ \sigma'_3\ \dots\ \sigma'_n$$

равносоставлены, то между этими двугранными углами существуетъ соотношенie

$$r_{\sigma_1}\sigma_1 + r_{\sigma_2}\sigma_2 + \dots = r'_{\sigma'_1}\sigma'_1 + r_{\sigma'_2}\sigma_2 + \dots + R\pi,$$

гдѣ всѣ коэффицiенты r суть цѣлыя положительныя числа, R цѣлое число.

Теперь покажемъ что это условie выполняется не всегда -- что возможны два равновеликie многогранника, которыхъ двугранные углы не удовлетворяютъ выведенному соотношенiю, и которые поэтому не равносоставлены. Такими равновеликими, но неравносоставленными фигурами будетъ напр. прямоугольный параллелопипедъ и равновеликiй ему правильный тетраэдръ. Докажемъ это. Всѣ двугранные углы первой фигуры прямые, а всѣ двугранные углы второй —равны $\omega = arccos\ \frac{1}{3}$, какъ это не трудно усмотрѣть изъ чертежа 9. (Если $ce \perp ab$, $de \perp ab$ и co есть высота тетраэдра, то $\cos\omega = \cos dec = \frac{oe}{ec} = \frac{1}{3}$, ибо $oe = \frac{1}{3}\ de$ и $de = ec$).



Фиг 9.

Если бы двугранные углы данныхъ фигуръ удовлетворяли необходимому условiю, то подставивъ вмѣсто угловъ $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ уголъ $\frac{\pi}{2}$ и вмѣсто $\sigma'_1, \sigma'_2 \dots$ уголъ ω, мы послѣ приведенiя получили бы

$$m\omega = \frac{n\pi}{2} \text{ или } \omega = \frac{p}{q}\ \pi,$$

гдѣ p и q цѣлыя числа, и $p < q$, ибо уголъ ω тетраэдра острый. Пусть выраженie

$$\cos\omega + i\sin\omega = \frac{1}{3} + i\,\frac{2\sqrt{2}}{3} = \xi_1$$

будетъ однимъ корнемъ нѣкотораго квадратнаго уравненія, а другой его корень $\xi_2 = \cos\omega - i\sin\omega = \frac{1}{3} - i\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогда это уравненіе выразится такъ:

$$(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) = 0 \text{ или } \xi^2 - \frac{2\xi}{3} + 1 = 0.$$

Но такъ какъ

$$\xi_1 = \cos\frac{p\pi}{q} + i\sin\frac{p\pi}{q},$$

то онъ есть одинъ изъ корней q-ой степени изъ 1. Такъ же и ξ_2 есть одинъ изъ корней q-ой степени изъ 1. Итакъ, ξ_1 и ξ_2 суть корни ур-нія $\xi^q - 1 = 0$. Но лѣвая часть этого уравненія, какъ цѣлая раціональная функція, въ которой коэффиціентъ при старшемъ членѣ равенъ 1, можетъ быть разложена на неприводимыхъ множителей, старшіе коэффиціенты которыхъ равны 1. Такое разложеніе можетъ быть произведено только однимъ способомъ, и коэффиціенты въ каждомъ многочленѣ, служащемъ множителемъ, числа цѣлыя. (Теорема Гаусса). Такъ какъ $(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)$ есть неприводимый раціональный трехчленъ, то онъ долженъ быть однимъ изъ неприводимыхъ сомножителей; но это невозможно, ибо этотъ трехчленъ имѣетъ дробный коэффиціентъ.

Такимъ образомъ обнаружено, что равновеликіе многогранники не всегда равносоставлены.

Кромѣ понятія о равносоставленныхъ многогранникахъ „*endlich-gleiche Polyeder*", Dehn вводитъ еще терминъ „*ergänzungs-gleiche Polyeder*". Подъ этимъ терминомъ Dehn разумѣетъ два такихъ многогранника, которые становятся конгруэнтными, если къ нимъ различнымъ способомъ приложить соотвѣтственно конгруэнтные многогранники. Dehn доказываетъ также, что два равновеликихъ многогранника могутъ быть не только не равносоставленными (не endlich-gleich), но и не ergänzungs-gleich, т. е. не могутъ быть дополнены до конгруэнтныхъ многогранниковъ. Этого доказательства мы, однако, развивать не станемъ.

Екатеринославское Научное Общество.

Въ послѣдніе годы у насъ начинаютъ появляться и въ провинціальныхъ неуниверситетскихъ городахъ научныя общества, съ цѣлью содѣйствовать развитію той или иной отрасли науки и распространенію научныхъ знаній. Вслѣдъ за пріобрѣвшими уже извѣстность „Полтавскимъ кружкомъ любителей физико-математическихъ наукъ", „Нижегородскимъ кружкомъ любителей астрономіи" и нѣкоторыми другими провинціальными обществами, въ г. Екатеринославѣ въ истекшемъ году возникло новое „Екатеринославское Научное Общество", съ болѣе широкими задачами,

чѣмъ названные кружки. Въ настоящее время Е. Н. Общество выпустило уже два выпуска своихъ отчетовъ и трудовъ, по которымъ и составлена настоящая замѣтка.

Вслѣдствіе возникшей въ послѣдніе 15 лѣтъ въ Екатеринославской губерніи широкой разработки минеральныхъ богатствъ, г. Екатеринославъ сильно разросся и сдѣлался средоточіемъ довольно многочисленной интеллигенціи. Открытіе Высшаго Горнаго училища привлекло въ Екатеринославъ и чисто научныхъ работниковъ.

„То приподнятое настроеніе", говоритъ проф. В. В. Куриловъ въ своей рѣчи при открытіи Общества *), „которое было вызвано столь знаменательнымъ историческимъ моментомъ, какъ открытіе въ городѣ высшаго учебнаго заведенія, обусловливало возбужденіе новыхъ вопросовъ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, лицамъ, близко стоящимъ къ дѣлу, рисовались картины общей дружной работы на почвѣ науки и просвѣщенія. Вотъ въ это именно время и явилась мысль объ объединеніи интеллигентныхъ силъ на почвѣ духовныхъ интересовъ".

Сначала было предположено ходатайствовать объ открытіи особой секціи при мѣстномъ отдѣленіи Императорскаго Техническаго Общества, съ доступной годичной платой. Но разрѣшенія на пониженіе вступной платы не послѣдовало, а потому заинтересованныя лица рѣшили учредить въ г. Екатеринославѣ самостоятельное научное общество. Направленіе и задачи общества лучше всего характеризуются слѣдующей выпиской изъ докладной записки, представленной мѣстнымъ губернаторомъ, однимъ изъ членовъ учредителей, графомъ Ѳ. Э. Келлеромъ, при ходатайствѣ объ открытіи Общества.

„Въ столичныхъ городахъ и большихъ университетскихъ центрахъ представители каждой отдѣльной науки уже объединились въ отдѣльныя общества; въ провинціи же учрежденіе научныхъ обществъ съ опредѣленными цѣлями носитъ болѣе или менѣе случайный характеръ; такимъ образомъ, въ Нижнемъ-Новгородѣ образовался кружокъ любителей астрономіи, въ Полтавѣ кружокъ любителей физико-химическихъ наукъ и т. п. Городъ Екатеринославъ не можетъ быть поставленъ на ряду ни съ университетскими, ни съ обыкновенными губернскими городами. Интеллигентныхъ силъ здѣсь не менѣе, чѣмъ въ большихъ университетскихъ центрахъ, но среди нихъ не можетъ быть выдѣлено, по крайней мѣрѣ, въ настоящее время, сколько-нибудь значительнаго числа лицъ, особливо интересующихся той или другой отраслью знанія. Объясняется это тѣмъ, что характеръ требованій, предъявляемыхъ къ наукѣ въ Екатеринославѣ, нѣсколько иной, чѣмъ въ другихъ городахъ; технику, химику, геологу,

*) „Матеріалы по исторіи возникновенія Екатеринославскаго Научнаго Общества". Записка, прочитанная проф. В. В. Куриловымъ 6-го мая 1901 г., при открытіи Общества.

историки мѣстнаго края пока еще слишкомъ много дѣла для того, чтобы имѣть время спокойно заниматься наукой: дѣла много; дѣятелей, по сравненію съ количествомъ дѣла, мало. Очень трудно сказать въ настоящее время, какая отрасль знаній найдетъ большое развитіе во вновь учрежденномъ Екатеринославскомъ научномъ обществѣ, — сама жизнь отвѣтитъ на этотъ вопросъ.

Въ виду указанныхъ соображеній учреждаемое Общество имѣетъ цѣлью слѣдить за успѣхами науки и содѣйствовать распространенію и развитію научныхъ знаній безъ опредѣленія отдѣла науки".

Докладъ кончается слѣдующими словами:

„Въ виду доступности членской платы, а равно и отсутствія ограниченій въ пріемѣ членовъ, есть надежда привлечь въ него большой контингентъ лицъ и тѣмъ самымъ возбудить интересъ къ наукѣ, чѣмъ и будетъ достигнута основная цѣль учреждаемаго общества".

И дѣйствительно, въ настоящее время Общество имѣетъ уже около 300 членовъ. Предсѣдателемъ Общества состоитъ профессоръ В. В. Куриловъ. Общество проявило уже въ теченіе первыхъ двухъ лѣтъ своего существованія интенсивную дѣятельность, что видно, между прочимъ, изъ того, что оно уже сумѣло выпустить двѣ книжки своихъ трудовъ. Первая книжка носитъ, такъ сказать, програмный характеръ. Здѣсь помѣщены in extenso заслушанные въ засѣданіяхъ Общества доклады, имѣющіе цѣлью ближайшимъ образомъ намѣтить характеръ и задачи дѣятельности Общества въ различныхъ направленіяхъ. Сюда относятся доклады: профессора В. В. Курилова „Объ основаніи Научнымъ Обществомъ въ г. Екатеринославѣ ботаническаго сада съ музеями естественноисторическимъ и археологическимъ"; Н. П. Заломанова „Задачи Научнаго Общества съ точки зрѣнія агронома и сельскаго хозяина"; В. А. Волжина „О метеорологическихъ изслѣдованіяхъ внѣ обсерваторій и станцій"; С. И. Гальперина „Задачи Екатеринославскаго Научнаго Общества въ отношеніи изученія фабричнаго быта и фабричнаго законодательства" и наконецъ, А. И. Ильина „Проэктъ учрежденія научной библіотеки и читальни".

Мы видимъ отсюда, сколь разнообразна задача, которую ставитъ себѣ Общество. Изъ протоколовъ, помѣщенныхъ во второй книжкѣ, видно, что всѣ эти проэкты и задачи находятся на пути къ осуществленію. Мало того, Правленіе занято разработкой вопроса объ учрежденіи въ Екатеринославѣ магнитной и метеорологической станцій 1-го разряда съ испытательной палаткой мѣръ и вѣсовъ.

Во второй книжкѣ, кромѣ протоколовъ, мы находимъ уже и труды Общества. Таковы: А. А. Шипова „Очеркъ жизни и дѣятельности В. И. Рагозина въ связи съ развитіемъ русской нефтяной промышленности"; И. Я. Акинфіева „Мнѣніе членовъ XI

съѣзда въ С.-Петербургѣ и печати по вопросу о преподаваніи естествознанія въ средней школѣ по программѣ профессора Кайгородова" и, наконецъ, профессора В. В. Курилова „Преподаваніе физики и химіи въ средней и высшей школѣ на экспериментальныхъ основаніяхъ". О послѣднемъ докладѣ мы будемъ еще имѣть случай побесѣдовать на страницахъ „Вѣстника".

Но что наиболѣе важно, что болѣе всего бросается въ глаза при чтеніи отчетовъ Екатеринославскаго Научнаго Общества, — это приподнятое идейное настроеніе, готовность широко раскрывать двери Общества всѣмъ, кто въ нихъ стучится, независимо отъ общественнаго положенія, рода дѣятельности и другихъ условій жизни.

Открывая Общество, графъ Ѳ. Е. Келлеръ выразилъ пожеланіе, чтобы этого запаса энергіи хватило надолго, чтобы Общество оказалось жизнеспособнымъ и жизнедѣятельнымъ. Присоединимъ сюда еще пожеланіе, чтобы новое Общество во все время своей дѣятельности сохранило ту идейную и гуманную окраску, съ которой оно вступило въ жизнь. Въ этомъ уже содержится полная гарантія, что оно будетъ служить дѣлу истинно прогрессивнаго оживленія нашей провинціи.

Ред.

ТЕМА ДЛЯ СОТРУДНИКОВЪ.

Объ ариѳметической и геометрической прогрессіяхъ высшихъ порядковъ.

Относительно темъ, которыя были предложены въ „Вѣстникѣ" въ теченіе послѣднихъ двухъ лѣтъ, нѣкоторые преподаватели выражали неудовольствіе по поводу того, что онѣ слишкомъ трудны и вовсе недоступны учащимся. Въ виду этого, мы предлагаемъ настоящую тему, по нашему мнѣнію, безусловно доступную для хорошаго ученика двухъ старшихъ классовъ средней школы. Матеріалъ для этой темы заимствованъ изъ работы P. Cattaneo: „Sulle progressione aritmetiche e geometriche d'ordine superiore". Нѣкоторыя предложенія, данныя въ этой работѣ, можно найти въ курсахъ „Теоріи конечныхъ разностей"; но большинство предложеній представляются намъ оригинальными.

1. Рядъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n \qquad (1)$$

принято называть ариѳметической прогрессіей, если разность $a_{i+1}-a_i$ есть постоянное число. Такую прогрессію, разность которой отлична отъ нуля, мы будемъ называть *ариѳметической прогрессіей I порядка.* Мы будемъ называть рядъ (1) ариѳметической

прогрессіей II, III, IV, ... порядка, если послѣдовательныя разности

$$a_2-a_1,\quad a_3-a_2,\ \ldots\ a_n-a_{n-1},\ \ldots$$

образуютъ ариѳметическую прогрессію I, II, III, ... порядка.

Такимъ же образомъ обобщается понятіе о геометрической прогрессіи съ тою разницей, что разности замѣняются отношеніями послѣдовательныхъ членовъ.

2. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться слѣдующими общепринятыми обозначеніями:

$$m!=1.2.3,\ \ldots\ m,\quad \binom{p+q}{q}=\frac{(p+q)!}{p!\,q!},\quad \binom{p}{p}=1,$$

$$\binom{p-q}{p}=0,\quad \binom{0}{0}=1,\quad \binom{0}{q}=0,\quad \binom{p}{0}=0.$$

3. Положимъ, что намъ данъ рядъ чичелъ

$$A_{1,1},\quad A_{1,2},\quad A_{1,3},\ \ldots\ A_{1,n},\ \ldots \tag{2}$$

Въ связи съ ними будемъ разсматривать числа

$$\begin{array}{l} A_{2,1},\ A_{2,2},\ A_{2,3},\ \ldots\ A_{2,n},\ \ldots \\ A_{3,1},\ A_{3,2},\ A_{3,3},\ \ldots\ A_{3,n},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m,1},\ A_{m,2},\ A_{m,3},\ \ldots\ A_{m,n},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

законъ составленія которыхъ выражается соотношеніемъ

$$A_{p+1,q}=A_{p,q+1}-A_{p,q}\,.$$

4. **Теорема 1.**

$$A_{p,q}=\sum_0^{q-1}{}^h\binom{q-1}{h}A_{p+h,1}.$$

5. **Теорема 2.**

$$A_{p,q}=\sum_0^{p-1}{}^h(-1)^{p-1-h}\binom{p-1}{h}A_{1,q+h}.$$

6. **Теорема 3.**

$$\sum_1^{n}{}^h A_{1,h}=\sum_1^{n}{}^h\binom{n}{h}A_{h,1}.$$

7. **Теорема 4.** *Если числа ряда (2) образуютъ ариѳметическую прогрессію m-аго порядка, то*

$$A_{m+1,1}=A_{m+1,2}=\ \ldots\ =A_{m+1,n}=\ \ldots\ =A\gtrless 0.$$

$$A_{m+1+p,q}=0.$$

Теорема 5. *При томъ же условіи*

$$A_{1,n}=\sum_{0}^{n-1}{}^{k}\binom{n-1}{k}A_{1+k,1}=\sum_{0}^{m}{}^{k}\binom{n-1}{k}A_{1+k,1}\ ;$$

$$A_{n,1}=\sum_{0}^{n-1}{}^{h}(-1)^{n-1-h}\binom{n-1}{h}A_{1,1+h}=\sum_{0}^{m}{}^{h}(-1)^{n-1-h}\binom{n-1}{h}A_{1,1+h}\ ;$$

$$\sum_{1}^{n}{}^{h}A_{1,h}=\sum_{0}^{n-1}{}^{k}\binom{n}{1+k}A_{1+k,1}=\sum_{0}^{m}{}^{k}\binom{n}{1+k}A_{1+k,1}.$$

Теорема 6. *Если числа ряда (2) образуютъ ариѳметическую прогрессію m-аго порядка, то*

$$A_{1,n}=\sum_{0}^{m}{}^{k}\binom{n-1}{k}\sum_{0}^{m}{}^{h}(-1)^{k-h}\binom{k}{h}A_{1,1+h}=$$

$$=\sum_{0}^{m}{}^{h}A_{1,1+h}\sum_{h}^{m}{}^{k}(-1)^{k-h}\binom{n-1}{k}\binom{k}{h}$$

$$\sum_{1}^{n}{}^{h}A_{1,h}=\sum_{0}^{m}{}^{k}\binom{n}{1+k}\sum_{0}^{m}{}^{h}(-1)^{k-h}\binom{k}{h}A_{1,1+h}=$$

$$=\sum_{0}^{m}{}^{h}A_{1,1+h}\sum_{h}^{m}{}^{k}(-1)^{k-h}\binom{n}{1+k}\binom{k}{h}.$$

Теорема 7. *При тѣхъ же условіяхъ изъ теоремы 2 слѣдуетъ, что*

$$\sum_{0}^{m}{}^{h}(-1)^{m-h}\binom{m}{h}A_{1,t+h}=A,\ \sum_{0}^{m+p}{}^{h}(-1)^{h}\binom{m+p}{h}A_{1,q+h}=0.$$

8. **Теорема 8.** *Если мы ко всѣмъ членамъ ариѳметической прогрессіи придадимъ одно и то же число, то получимъ ариѳметическую прогрессію того-же порядка съ тою-же послѣдней разностью.*

Теорема 9. *Умножая всѣ члены ариѳметической прогрессіи на постояннаго множителя, мы получимъ ариѳметическую прогрессію того же порядка.*

Теорема 10. *Складывая почленно нѣсколько ариѳметическихъ прогрессій, мы получимъ ариѳметическую прогрессію.*

9. **Теорема 11.** *Если числа ряда (2) образуютъ ариѳметическую прогрессію m-го порядка, то числа ряда*

$$A'_{1,1},\quad A'_{1,2},\quad A'_{1,3}\ .\ .\ .\ .\ ,\ A'_{1,n},\ .\ .\ .\ .\ ,$$

гдѣ

$$A'_{1,n}=n^{p}A_{1,n}$$

образуютъ ариѳметическую прогрессію (m+p)-аго порядка.

Теорема 12. *Если числа ряда (2) образуютъ ариѳметическую прогрессію p-аго порядка съ послѣднею разностью A; числа-же* $B_{1,n}$ *(n=1, 2, 3, ...) образуютъ ариѳметическую прогрессію q-аго порядка съ послѣдней разность B, то рядъ, общій членъ котораго равенъ* $A_{1,n} \cdot B_{1,n}$*, представляетъ собой ариѳметическую прогрессію порядка (p+q), послѣдняя разность которой равна*

$$\binom{p+q}{q} AB.$$

Эта теорема обобщается на случай почленнаго перемноженія нѣсколькихъ ариѳметическихъ прогрессій. Случай, когда эти прогрессіи тождественны.

10. Какъ примѣняются подготовительныя теоремы, выраженныя въ теоремахъ 1—3, и свойства прогрессіи, когда мы имѣемъ дѣло съ геометрической прогрессіей. (Случай геометр. прогрессіи долженъ быть изслѣдованъ столь-же обстоятельно).

Срокъ работы 31-го декабря 1902 г.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Геометрическій парадоксъ.

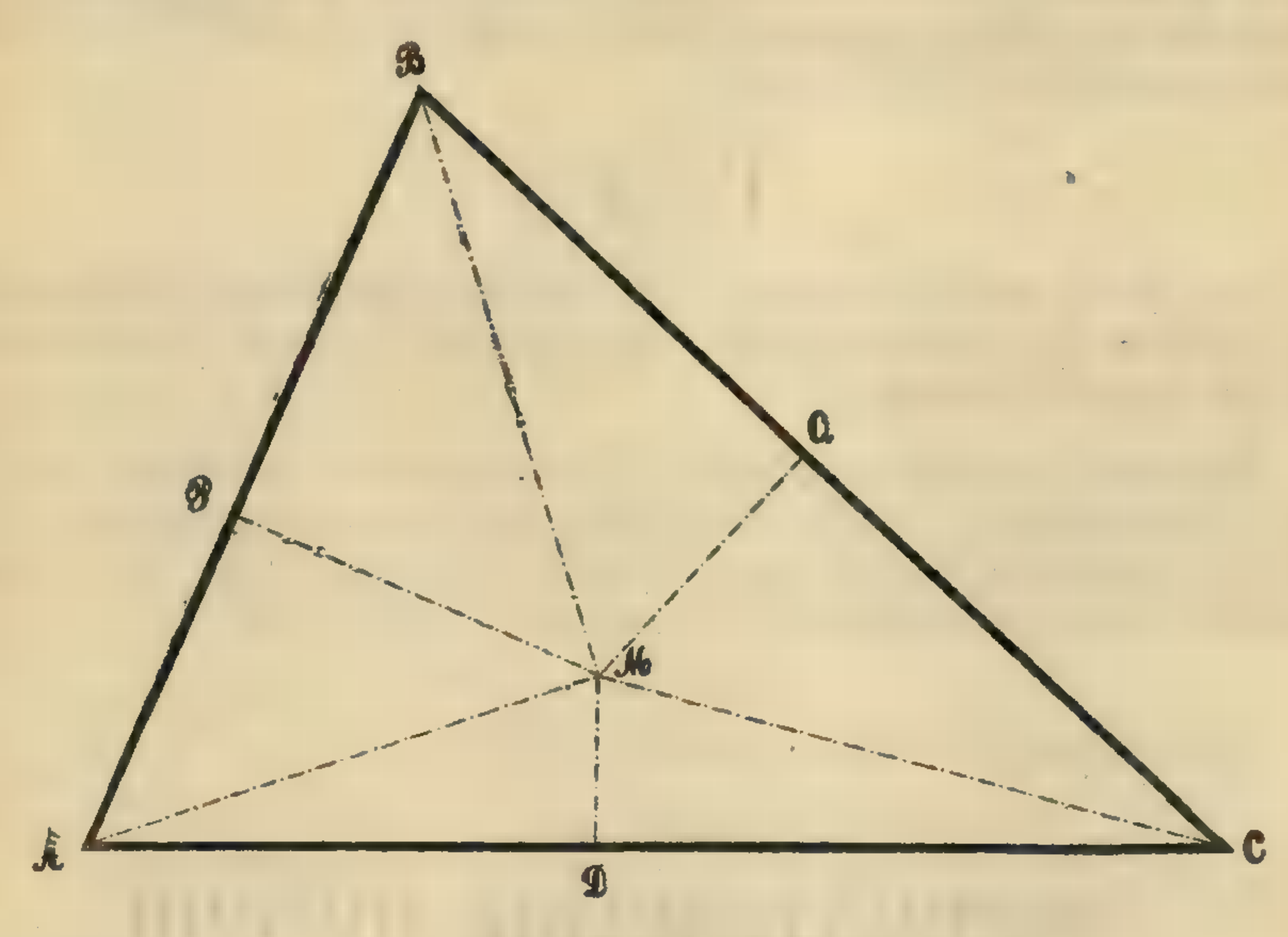
Въ геометрическихъ доказательствахъ, въ которыхъ имѣютъ дѣло съ точками пересѣченія различныхъ линій, центръ тяжести всего доказательства обыкновенно въ томъ именно и заключается, чтобы установить, пересѣкаются-ли эти линіи и гдѣ должна находиться точка пересѣченія. Между тѣмъ, наши обычныя доказательства въ весьма рѣдкихъ случаяхъ удовлетворяютъ этому требованію. Точка пересѣченія берется на глазъ въ надлежащемъ мѣстѣ, а затѣмъ доказательство проводится—на основаніи готоваго уже чертежа. На этомъ основаны и всѣ парадоксальныя геометрическія доказательства, каковыя, однако, часто не хуже тѣхъ, которыя мы встрѣчаемъ въ лучшихъ нашихъ учебникахъ геометріи.

Слѣдующій остроумный парадоксъ чрезвычайно характеренъ, какъ примѣръ того, куда можетъ привести доказательство, основанное на непровѣренной интуиціи.

Теорема. *Всякій треугольникъ непремѣнно долженъ быть равнобедреннымъ.*

Пусть ABC нѣкоторый треугольникъ; проводимъ биссектрису BM угла при вершинѣ и изъ середины D противолежащаго основанія возставляемъ къ послѣднему перпендикуляръ.

Изъ точки M пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ опустимъ перпендикуляры MP и MQ на боковыя стороны AB и CB и соединимъ точку M съ A и C. Имѣемъ:



$$\Delta ADM = \Delta CDM;$$

а слѣдовательно,

$$\Delta MPA = \Delta MQC.$$

откуда

$$AP = CQ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Далѣе,

$$\Delta MPB = \Delta MQB,$$

слѣдовательно,

$$PB = QB \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Складывая (1) и (2), получаемъ:

$$AB = CB,$$

что и требовалось доказать.

Въ чемъ заключается ошибка?

(Заимствовано). *Д. Ш.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

† **А. И. Гольденбергъ.**—Въ Петербургѣ недавно скончался извѣстный преподаватель математики *А. И. Гольденбергъ.* Врядъ-ли кому-либо изъ преподавателей математики не извѣстно это имя. Покойный составилъ цѣлый рядъ учебниковъ по элементарной математикѣ. Его „Методика ариѳметики“ пользуется большой извѣстностью. Редакція посвятитъ въ ближайшемъ будущемъ покойному педагогу спеціальную статью.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 208 (4 сер.). Въ произведеніи

$$1.2.3 \ldots (n-1)n(n+1)$$

вычеркиваютъ всѣми возможными способами два сосѣднихъ сомножителя и перемножаютъ сомножителей, остающихся каждый разъ послѣ вычеркиванія. Доказать, что сумма всѣхъ составленныхъ такимъ образомъ произведеній менѣе произведенія $1.2.3 \ldots (n-1)n(n+1)$.

И. Плотникъ (Одесса).

№ 209 (4 сер.). Найти общій видъ чиселъ, которыя, по раздѣленіи на 7, даютъ въ остаткѣ 3, а квадраты и кубы которыхъ, по раздѣленіи на 7^2 и 7, даютъ въ остаткѣ соотвѣтственно 44 и 111.

Н. С. (Одесса);

№ 210 (4 сер.). Отъ дѣленія цѣлаго числа a на цѣлое число b получается остатокъ r. Какъ найти два цѣлыхъ числа x и y такъ, чтобы отъ дѣленія ax на by получался тотъ же остатокъ r?

X.

№ 211 (4 сер.). Черезъ ортоцентръ H треугольника ABC проводятъ прямыя, параллельныя биссектрисамъ угловъ A, B, C; эти прямыя встрѣчаютъ противоположныя стороны BC, CA, AB соотвѣтственно въ точкахъ α, β, γ. Доказать, что прямыя $A\alpha$, $B\beta$ и $C\gamma$ проходятъ черезъ одну точку.

Заимств. изъ ***Journal de Mathématiques élémentaires.***

№ 212 (4 сер.). Пусть

$$b = \prod_{k=1}^{n} b_k,$$

гдѣ множители b_1, b_2, ... b_n суть положительныя числа. Пусть a нѣкоторое положительное число. Доказать, что

$$\frac{1}{\lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lg_{b_k} a}.$$

Заимств. изъ ***Casopis.***

№ 213 (4 сер.). Тѣло вѣса p динъ, упавъ съ высоты h сантиметровъ на неупругую и адіабатную *) подставку, нагрѣвается на t°; узнать его теплоемкость.

Л. Ямпольскій (Одесса).

---

*) Терминъ употребленъ не вполнѣ правильно.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№111 (4 сер.). *Тѣло падаетъ съ начальной скоростью, равной нулю, въ пустотѣ и въ такомъ мѣстѣ, гдѣ длина секунднаго маятника равна 99 сантиметрамъ. Къ концу какого времени (отъ начала паденія) скорость тѣла будетъ равна 20 метрамъ?*

Въ разсматриваемомъ мѣстѣ, согласно съ формулой маятника,

$$1 = \pi \sqrt{\frac{99}{g}},$$

откуда

$$g = 99\pi^2.$$

Обозначивъ промежутокъ времени, по истеченіи котораго скорость становится равной 20 метр. = 2000 сант., черезъ t (въ секундахъ), имѣемъ:

$$2000 = gt = 99\pi^2 t,$$

откуда $t = \frac{2000}{99\pi^2}$. Полагая $\pi = 3{,}14$, найдемъ $t = 2{,}05$ секундъ (съ точностью до $\frac{1}{100}$ секунды).

Д. Дьяковъ (Новочеркасскъ); *П. Грицынъ* (ст. Цымлянская).

№ 115 (4 сер.). *Дана окружность и точка* H *внутри нея; вписать въ этотъ кругъ треугольникъ* ABC, *вершина котораго* A *есть данная точка окружности и для которой* H *есть центръ круга вписаннаго.*

Продолжимъ прямую AH до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ A'. Предполагая задачу рѣшенной, соединимъ точки C и H прямой. Тогда

$$\angle CHA' = \angle CAH + \angle HCA = \angle A'AB + \angle HCB = \angle A'CB + \angle HCB =$$
$$= \angle HCA'.$$

Итакъ, въ треугольникѣ $HA'C$ углы CHA' и HCA' равны; слѣдовательно, $A'H = A'C$ (1). Такъ какъ $\angle BAA' = \angle CAA'$, то $\smile A'B = \smile A'C$ и $A'C = A'B$ (2). Слѣдовательно, для построенія искомаго треугольника надо изъ точки A' сдѣлать на данной окружности засѣчки $A'B$ и $A'C$ радіусомъ $A'H$; тогда треугольникъ ABC, полученный такимъ образомъ, есть искомый.

М. Семеновскій (Перновъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ).

№ 122 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$
$$x + x^2y^2 + y = 7.$$

Полагая

$$x + y = t, \quad xy = u \qquad (1),$$

представляемъ данную систему въ видѣ

$$t^2 - u = 7, \quad t + u^2 = 7 \qquad (2).$$

Вычитая изъ перваго изъ уравненій (2) второе, имѣемъ:

$$t^2 - u^2 - t - u = 0,$$

или

$$(t+u)(t-u-1)=0,$$

откуда либо

$$t+u=0 \qquad (3),$$

либо

$$t-u-1=0 \qquad (4).$$

Подставляя значеніе t изъ уравненія (4) въ одно изъ уравненій (2), находимъ:

$$u^2+u-6=0,$$

откуда $u_1=2$, $u_2=-3$, а потому, соотвѣтственно, (см. (4)) $t_1=3$, $t_2=-2$. Слѣдовательно (см. (1)), мы получимъ нѣкоторыя изъ рѣшеній предложенной системы, разсматривая x и y, какъ корни квадратныхъ уравненій:

$$v^2-3v+2=0, \quad z^2+2z-3=0.$$

Корни перваго изъ этихъ уравненій суть 1 и 2, а второго изъ нихъ 1 и 3. Поэтому данная система допускаетъ рѣшенія:

$$x_1=1; \quad x_2=2; \quad x_3=1; \quad x_4=-3;$$

$$y_1=2; \quad y_2=1; \quad y_3=-3; \quad y_4=1.$$

Остальныя рѣшенія данной системы мы получимъ, подставивъ значеніе t изъ уравленія (3) въ одно изъ уравненій (2). Тогда получимъ

$$t^2+t-7=0,$$

откуда $t_{3,4}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{29})$, (см. (3)) $u_{3,4}=\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{29})$.

Пользуясь соотвѣтственными значеніями t и u, найдемъ остальныя четыре пары рѣшеній, двѣ изъ которыхъ дѣйствительны, а двѣ—мнимыя.

К. Захаровъ (Вольскъ); *М. Семеновскій* (Перновъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Г. Огановъ* (Эривань); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Д. Дьяковъ* (Новочеркасскъ); *Б. Д.* (К.); *М. Пучковскій* (Умань); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Б. Юльинъ*; *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *П. Полушкинъ* (Знаменка); *В. Микшъ* (Новочеркасскъ).

№ 133 (4 сер.). ***Рѣшить систему уравненій:***

$$(y+z)^2=a(1+x), \quad (z+x)^2=a(1+y), \quad (x+y)^2=a(1+z).$$

Вычитая изъ перваго уравненія второе, а затѣмъ третье и разлагая первую часть на множителей, приходимъ къ равенствамъ:

$$(x+2z+y)(y-x)=a(x-y), \quad (x+2y+z)(z-x)=a)(x-z),$$

откуда

$$(x+2z+y+a)(y-x)=0 \qquad (1),$$

$$(x+2y+z+a)(z-x)=0 \qquad (2).$$

Изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что либо $x-y=0$, либо $x+y+2z+a=0$.

Остановившись на первомъ изъ этихъ предположеній, имѣемъ

$$x=y \qquad (3).$$

Подставивъ въ уравненіе (2) x вмѣсто y, находимъ:

$$(3x+z+a)(z-x)=0,$$

а потому либо

$$x=z \ (4), \quad \text{либо } 3x+z+a=0 \ (5).$$

Остановившись на предположеніи (4), имѣемъ (см. (3))

$$x=y=z \quad (6).$$

Подставивъ x вмѣсто y и z (см. (6)) въ одно изъ предложенныхъ уравненій, имѣемъ квадратное уравненіе относительно x

$$4x^2=a+ax,$$

откуда (см. (6))

$$x=y=z=\frac{a\pm\sqrt{a^2+16a}}{8} \quad (\alpha).$$

Если же остановимся на предположеніи (5), то, подставивъ изъ уравненія (5) значеніе z въ первое изъ предложенныхъ уравненій и замѣнивъ (см. (3)) y черезъ x, имѣемъ:

$$(x-a-3x)^2=a(1+x), \quad 4x^2+3ax+a^2-a=0$$

откуда,—въ связи съ равенствами (3) и (5),—находимъ:

$$x=y=\frac{-3a\pm\sqrt{16a-7a^2}}{8}; \quad z=\frac{a\mp3\sqrt{16a-7a^2}}{8} \quad (\beta).$$

Такимъ образомъ, предположеніе $x=y$ приводитъ къ четыремъ рѣшеніямъ, доставляемыхъ формулами (α) и (β), при чемъ въ этихъ формулахъ надо брать одновременно либо верхніе, либо нижніе знаки при радикалахъ.

Предположимъ теперь, что $x\neq y$, $x\neq z$. Тогда изъ равенствъ (1) и (2) находимъ

$$x+2z+y+a=0, \quad x+2y+z+a=0.$$

Вычитая второе изъ этихъ равенствъ изъ перваго, имѣемъ:

$$z-y=0, \quad \text{откуда } z=y.$$

Итакъ, неизбѣжно одно изъ трехъ допущеній:

$$\text{либо } x=y, \quad \text{либо } y=z, \quad \text{либо } z=x.$$

Вслѣдствіе симметричности предложенныхъ уравненій относительно x, y и z, легко вывести системы рѣшеній, вытекающія изъ допущеній $y=z$ и $z=x$, среди которыхъ окажется двѣ новыхъ системы рѣшеній, а именно:

$$y=z=\frac{-3a\pm\sqrt{16a-7a^2}}{8}; \quad x=\frac{a\mp3\sqrt{16a-7a^2}}{8} \quad (\gamma),$$

$$z=x=\frac{-3a\pm\sqrt{16a-7a^2}}{8}; \quad y=\frac{a\mp3\sqrt{16a-7a^2}}{9} \quad (\delta).$$

Такимъ образомъ, въ формулахъ (α), (β), (γ), (δ) заключаются всѣ возможныя рѣшенія.

Л. Гальперинъ (Бердичевъ); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *Б. Д.* (К.); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Г. Огановъ* (Эривань); *В. Гудковъ* (Свеаборгъ); *С. Кудинъ* (Москва).

Конецъ XXVII семестра.

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 9-го Іюля 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.